

二维气动问题中 Kriging 代理模型精度影响因素

马 洋¹, 张青斌², 韩启龙¹, 华明军¹, 李红霞¹

(1. 火箭军工程大学 动力工程系, 西安 710025;

2. 国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 长沙 410073)

摘 要: 以二维跨声速临界翼型的阻力特性为对象, 探讨样本点数目、Kriging 代理模型参数及其类型等对模型精度的影响。阻力系数采用计算流体力学(CFD)方法得到。模型精度的验证采用交叉验证方法, 采用平均误差、最大误差和标准交叉验证残差来衡量 Kriging 代理模型的精度。研究结果表明: ① Kriging 代理模型预测气动阻力效果较好。② 模型精度随样本点的增多而提高, 剔除与样本点响应趋势不相符的“奇异点”后, 模型精度显著提高, 平均误差减小 5%~38%, 最大误差减小 13%~77%。③ 核函数类型对模型精度的影响最大, 相关参数次之, 回归模型的影响最小。采用高斯相关函数、2 阶多项式回归模型, 以及合适的相关参数值时, Kriging 代理模型的精度最高。

关 键 词: Kriging 代理模型; 精度验证; 气动力; 跨声速临界翼型; 气动外形优化

中图分类号: V411.3

文献标志码: A

Factors influencing the accuracy of Kriging surrogate model in two-dimensional aerodynamic problem

MA Yang¹, ZHANG Qing-bin², HAN Qi-long¹,

HUA Ming-jun¹, LI Hong-xia¹

(1. Department of Power Engineering,

Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China;

2. College of Aerospace Science and Engineering,

National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The factors influencing the accuracy of Kriging surrogate model including the number of sample points, the parameters of model and their types, were researched. The drag property of two-dimensional transonic airfoil was used to construct the surrogate model. The computational fluid dynamics (CFD) was employed to compute the drag coefficient. Three kinds of errors, i. e. average error, maximal error and standardized cross-validated residual were employed to measure the accuracy of the Kriging surrogate model while the cross validation was applied as the accuracy validation method. The results obtained are summarized as follows. First, the Kriging surrogate model performs well when predicting the aerodynamic drag of the two-dimensional transonic airfoil. Second, the accuracy of model improves with the increase of sample number, and when the ‘bizarre airfoil’ whose responses based on Kriging surrogate model are opposite with the normal ones are deleted, the accuracy of the model is improved obviously, and the average error and maximal error decrease 5%—

收稿日期: 2015-02-02

基金项目: 第二炮兵工程大学科研基金青年项目(2015QNJJ034); 国防科学技术大学科学研究项目(JC13-01-04)

作者简介: 马洋(1982—), 男, 湖南常德人, 讲师, 博士, 主要从事飞行器外形优化设计研究。

38% and 13%—77% respectively. Third, the model accuracy is mainly affected by type of kernel function, followed by the correlation parameter, while the regression model has little influences. The Kriging surrogate model with Gauss correlation function, second order regression model and optimal correlation parameter has the best accuracy.

Key words: Kriging surrogate model; accuracy validation; aerodynamic force; transonic airfoil; aerodynamic configuration optimization

随着计算机技术的快速发展和计算资源的日益丰富,数值仿真已经在很多学科领域中成为最主要的分析手段.但是随着所构建的仿真模型与实际物理模型越来越接近,工程问题越来越复杂,数值仿真分析的巨大耗费与有限的计算资源之间的矛盾并没有因为计算资源的丰富而缓解,反而在工程优化设计等问题中变得尤为突出.近年来,代理模型作为解决这一矛盾的方法被广泛应用于各类耗时问题的计算分析中^[1-5].研究人员^[6-9]从精度、效率、鲁棒性等方面对比分析了响应面、径向基函数、人工神经网络、Kriging、支撑向量回归等几种常见代理模型技术的优缺点,结果显示,Kriging 代理模型尽管构建相对复杂,但却具有近似精度高、鲁棒性好等优点,并且十分适合于强非线性问题的预测.因此 Kriging 代理模型在气动、结构等耗时工程问题中得到了广泛的应用^[10-14].

在 Kriging 代理模型的应用过程中,模型精度是首当其冲需要关注的问题.影响 Kriging 代理模型精度的因素主要有如下 3 类:第 1 类是真实物理问题本身的特性,如非线性特性、极值特征等.该类因素由所研究问题决定,一般不受研究人员的控制;第 2 类因素为样本点的特征,如数目、分布等,该类因素对模型精度影响很大,需要进行仔细研究.相关学者^[15-16]主要对样本点的采集方式进行研究,很少涉及样本点数目对代理模型精度的影响.第 3 类因素为 Kriging 代理模型自身参数.对于这类因素,研究人员进行了细致的研究.Mehmani 等^[17]采用多目标优化算法,以代理模型的平均误差和最大误差为目标,从代理模型类型、模型基函数和模型超参数等 3 个层面,发展了一种代理模型及其模型参数的选择方法.陈鹏等^[18]针对相关参数寻优过程对初始点的依赖,提出了一种改进的二进制编码微粒群算法来求解相关参数,较好解决了这一问题.Ahmed 等^[19]对 Kriging 代理模型参数的特征进行了细致研究,并将代理模型应用于工程优化中.

本文以二维气动问题为背景,采用计算流体力学(CFD)计算气动特性,在分析 Kriging 代

理模型参数特征和介绍模型精度验证方法的基础上,细致研究样本点数目、模型参数及类型等因素对模型精度的影响,为代理模型的应用奠定了坚实的基础.

1 Kriging 代理模型

1.1 模型基本思想

对于真实物理问题,Kriging 代理模型假设其响应值与自变量之间的函数关系可以近似表示为^[20]

$$y = f(x)^T \beta + z(x) \quad (1)$$

其中 $f(x)$ 为 p 个给定函数 $f_i(x) (i=1,2,\dots,p)$ 的线性组合,称为回归模型, β 为相应的回归参数. $f_i(x)$ 的不同组合模式形成了不同的回归模型,按照 $f_i(x)$ 的最高阶数可以将常用的回归模型分为 0 阶(常数)模型、1 阶模型和 2 阶模型,具体表达式见文献[21].

$z(x)$ 是高斯随机过程误差,具有如下统计特征:均值为 0,均方差为 σ^2 ,协方差为 $\sigma^2 R(\theta, x^i, x^j)$,其中 $R(\theta, x^i, x^j)$ 为任意两个样本点 x^i 和 x^j 之间带有相关参数 θ 的相关函数,一般可以表示成如下形式

$$R(\theta, x^i, x^j) = \prod_{l=1}^n R_l(\theta_l, x_l^i - x_l^j) = \prod_{l=1}^n R_l(\theta_l, d_l) \quad (2)$$

上式中 $R_l(\theta_l, d_l)$ 为相关函数的核函数, d_l 为表征任意两样本点间距离关系的变量, θ_l 为样本点第 l 个方向上的相关参数,核函数主要有高斯函数、指数函数、线性函数、球函数、样条函数等,具体的形式见文献[20].

实际上在回归模型和相关函数模型类型确定的条件下,基于样本点和响应值得到的相关矩阵 $\mathbf{R}$ 以及基于 $\mathbf{R}$ 推导出来的回归参数预测值 $\hat{\beta}$ 和均方差预测值 $\hat{\sigma}^2$ 都依赖于相关参数 θ ^[18].采用极大似然函数方法可以将求解 θ 的问题转化为一个最优化问题,通过寻优算法可以求得最优的相关参

数 $\theta^{[22]}$.

1.2 模型精度判断与验证

代理模型精度验证是十分重要而基础的工作,首先给出本文用到的 3 个典型的模型精度判断标准,其中平均误差和标准交叉验证残差表征了代理模型在整个可行域上的精度,而最大误差则代表了代理模型偏离真实值的最大程度.

1) 平均误差(average error, e_a)

$$e_a = \frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{test}}} \left| \frac{y_i(x) - \hat{y}_i(x)}{y_i(x)} \right| \quad (3)$$

其中 y 和 $\hat{y}$ 分别为待检验点的真值与预测值, N_{test} 为检验样本点的数目.

2) 最大误差(maximal error, e_m)

$$e_m = \max \left[\frac{y_i(x) - \hat{y}_i(x)}{y_i(x)} \right] \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_{\text{test}}$$

3) 标准交叉验证残差(standardized cross-validated residual, δ_s)

$$\delta_s = \frac{y(x) - \hat{y}(x)}{s(x)} \quad (5)$$

其中 s 为预测方差.

下面给出代理模型精度验证方法:交叉验证法.该方法可以简单表述为:首先将待验证的样本点集随机分成样本数目大致相等的若干样本点子集,然后对于每一个样本点子集,将其作为待验证的数据,其余的样本点用于构建代理模型,这样可以得到该子集对应的交叉验证误差和方差.当所有样本点子集都充当了验证数据后,就可以得到所有子集的交叉验证误差和方差.再采用 δ_s 对模型精度进行判断.特殊情况下,当样本点子集的数目与样本点数目相同时,该方法又称为逐一交叉验证法(leave-one-out cross validation)^[23].

2 气动问题描述

2.1 研究对象及其外形参数化

采用类型函数/形状函数转换(class function/shape function transformation, CST)方法^[21,24]生成二维跨声速翼型曲线,翼型的上下曲线均采用 4 阶伯恩斯坦多项式表示,类型函数指数和曲线后端高度为定值,为了使得到的翼型更加贴近真实翼型,假设翼型上下曲线的伯恩斯坦多项式前 4 个系数($A_0 \sim A_3$)互为相反数,而第 5 个系数 A_4 相等.表 1 给出了翼型曲线伯恩斯坦多项式系数及其取值范围,图 1 则为 $A_0 \sim A_4$ 不

同取值时的两个典型翼型曲线,图中 X 为弦长方向坐标, Y 为厚度方向坐标,由图可知采用 CST 方法生成参数化翼型曲线十分简便,且得到的曲线形式非常丰富.本文流场分析时的来流条件为:马赫数 $Ma_\infty = 0.707$,静压 $p_\infty = 125.2 \text{ kPa}$,静温 $T_\infty = 300 \text{ K}$,攻角 $\alpha = 1^\circ$.

表 1 翼型的伯恩斯坦多项式系数及其取值范围

Table 1 Bernstein coefficients of airfoil and their ranges

多项式系数	数值	
	上限	下限
A_0	0.6	0.1
A_1	0.5	0.1
A_2	0.5	0.1
A_3	0.6	0.1
A_4	0.6	0.1

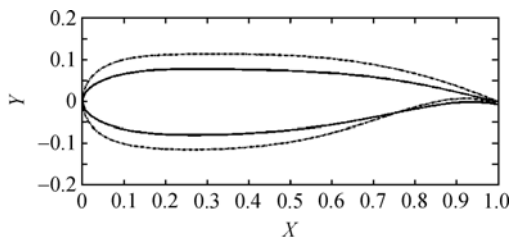


图 1 典型翼型曲线示意图

Fig. 1 Schematic diagram of typical configuration of airfoil

2.2 气动力计算及验证

本文研究的跨声速临界翼型绕流问题可以采用二维黏性可压缩湍流流动处理,对流项采用 2 阶迎风差分格式,湍流模型采用 Spalart-Allmaras 模型,壁面满足无滑移边界条件,远场边界满足压力远场边界条件.采用 C 型网格进行网格划分,网格周向节点数为 215,径向节点数为 47.在壁面附近进行加密,第 1 层网格高度为 10^{-5} ,网格生长率为 1.3,翼型计算网格如图 2 所示.

为了验证 CFD 计算的准确性,对典型跨声速临界翼型 NASA SC(2)-0518 的绕流流场进行验证性计算,图 3 为所得到的不同攻角(α)条件下阻力系数(C_d)与文献[25]结果的对比情况(其中正方形实线代表本文结果,三角形虚线代表文献[25]计算数据),可见在小攻角条件下本文 CFD 分析结果具有较好的精度.

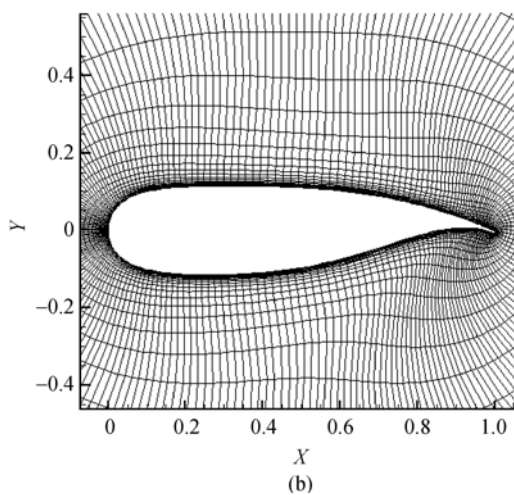
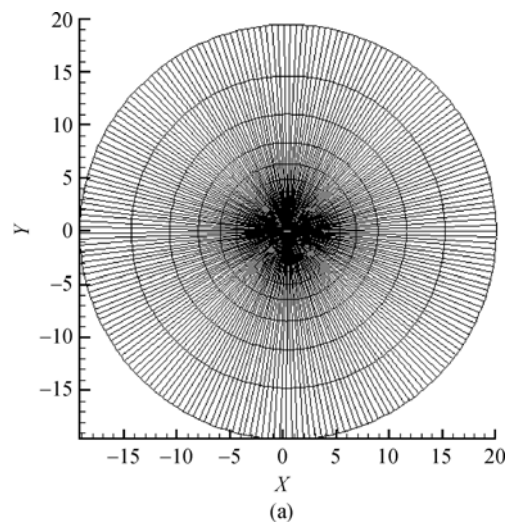


图2 翼型计算网格

Fig. 2 Computational grids of airfoil

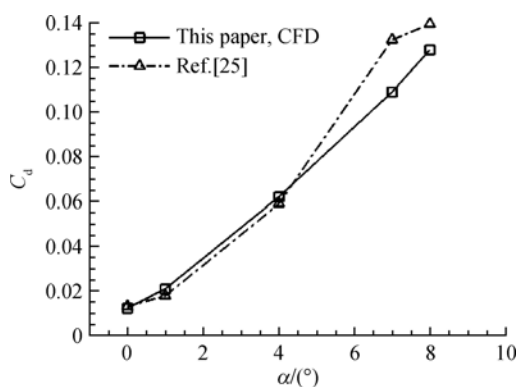


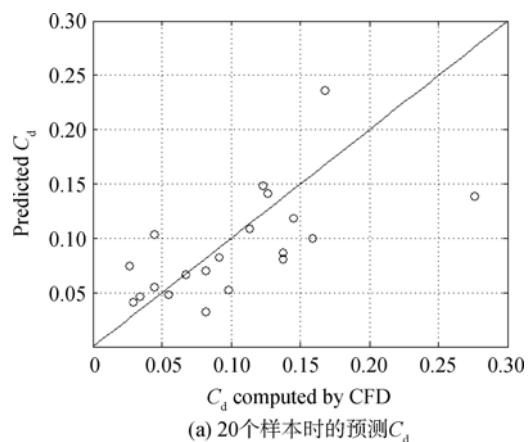
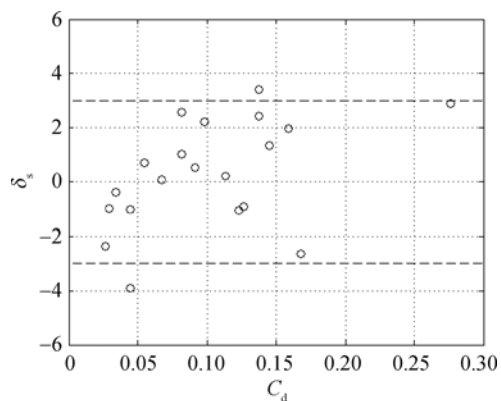
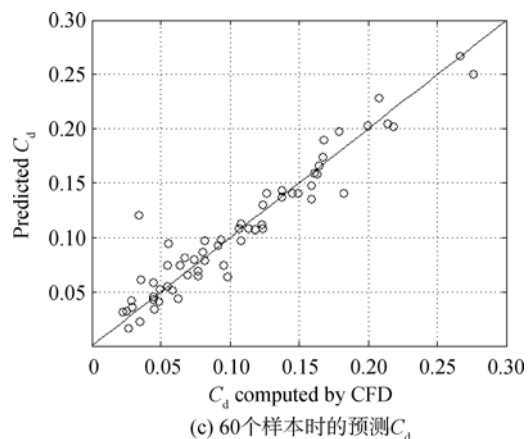
图3 不同攻角下 NASA SC(2)-0518 翼型阻力系数计算结果验证

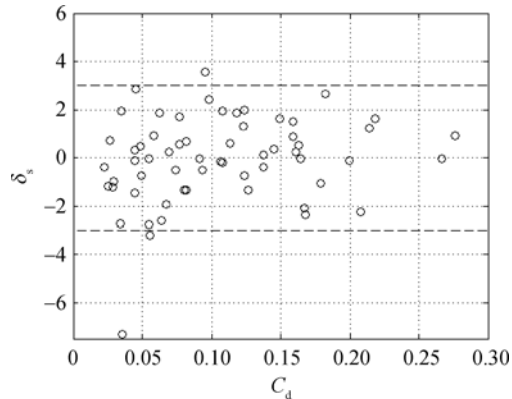
Fig. 3 Validation of drag coefficient of NASA SC(2)-0518 airfoil under conditions of different angle of attack

3 样本点数目对代理模型精度的影响

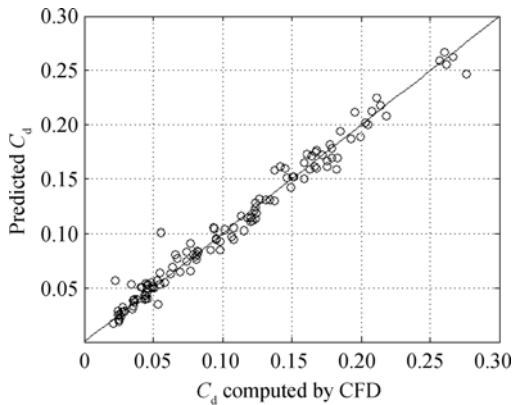
采用逐一交叉验证方法进行阻力系数的

Kriging 代理模型精度验证,样本点的选取采用拉丁超立方方法,在构建 Kriging 代理模型时,相关函数核函数采用高斯函数,回归模型采用常数模型.图4给出了样本点从20个增加到121个时,模型预测值(纵坐标)与真实值(横坐标,由CFD计算得到)的分布以及相应的 δ_s 值.当预测值与真实值越紧密地靠近 45° 斜线, δ_s 值越集中地分布在 $[-3, 3]$ 区间时,模型精度越高.从图4中可以看出,随着样本点的增多,真实值与预测值形成的数据点逐渐向 45° 斜线靠拢,这说明代理模型的整体精度逐步提高.从 δ_s 值的变化情况来看,随着样本点的增多,落在 $[-3, 3]$ 区间之外的数据

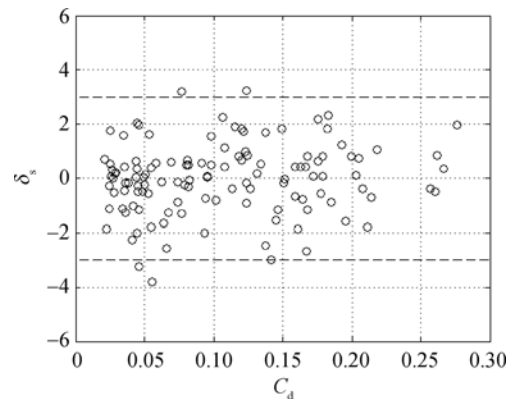
(a) 20个样本时的预测 C_d (b) 20个样本的预测 δ_s 值(c) 60个样本时的预测 C_d



(d) 60个样本的预测 δ_s 值



(e) 121个样本时的预测 C_d



(f) 121个样本的预测 δ_s 值

图 4 代理模型阻力系数预测值与 δ_s 值随样本点
数目的变化规律

Fig. 4 Evolution process of predicted drag coefficient
and δ_s versus sample number

点个数并没有相应减少,但落在区间之外的数据
点个数占总样本点个数的比例却逐渐减小. 所以
从总体上看,随着样本点个数的增加,阻力系数
的代理模型精度逐步提高.

表 2 给出了代理模型在不同样本点数目条件
下的平均误差和最大误差. 可以看出,随着样本
点的增多,代理模型的平均误差逐步减小,但最
大误差的变化却极不规律. 结合图 4 可以看出,不
管样

本点为多少,总存在着个别“奇异点”:它们的
真实值与预测值之间的误差总是很大(50%以
上),它们与其他样本点的响应趋势不相符甚
至是相反,具体表现为:在小攻角条件下,跨
声速临界翼型的阻力系数大体上与翼型厚度
成正比,但这些“奇异点”却与这一规律严重
相悖,厚度较大,但阻力系数却很小,或是厚
度较小但阻力系数却很大. 根据 Keane 的研
究^[26],这样的“奇异点”将会使得代理模型
的全局精度变差,为了消除它们的不利影响,
一般的做法是将它们从样本点集中剔除,重新
构建代理模型. 表 3 给出了剔除掉“奇异点”
之后的模型的平均误差和最大误差. 可以看
出,在剔除部分“奇异点”之后,样本点数目大
致相同时,代理模型的平均误差减小 5%~38%,
最大误差减小 13%~77%. 另外,剔除掉“奇
异点”之后,模型的最大误差与样本点的数目
大致成反比.

表 2 不同样本数目条件下 Kriging 代理模型的误差

Table 2 Errors of Kriging surrogate model under
condition of different sample number

误差	样本数目					
	20	40	60	80	100	121
平均误差/%	40.7	16.4	18.9	12.7	10.2	9.32
最大误差/%	177	126	255	138	85.6	150

表 3 剔除“奇异点”后 Kriging 代理模型的误差

Table 3 Errors of Kriging surrogate model when
'bizarre airfoil' are deleted

误差	样本数目					
	16	37	56	76	96	118
平均误差/%	25.2	15.5	11.9	11.8	7.14	7.76
最大误差/%	154	106	57.1	98.4	40.5	45.4

为了探究“奇异点”出现的原因及它们的特
点,选取典型的“奇异点”和“正常点”以及
跨声速超临界翼型为对象分析其外形及流
场特点.

图 5 为典型“奇异点”(bizarre airfoil)与
“正常点”(normal airfoil)以及 NASA SC(2)
0518 翼型(0518 airfoil,简称 0518 外形)的
几何形状对比. 图 6 为相应的表面压力对比.
从图中可以看出,与“正常点”相比较,“奇
异点”与 0518 外形在翼型剖面上具有较为
类似的特点,它们中前部较为平坦,因而压
强分布也相对较为平坦,没有显著的压力
高峰,并且流动能较为缓和地减速到亚声
速,表面(尤其是下表面)只存在较弱的激
波,因而

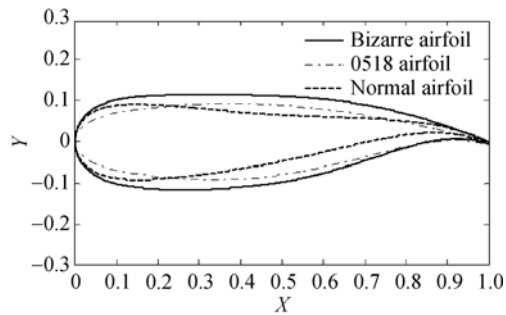
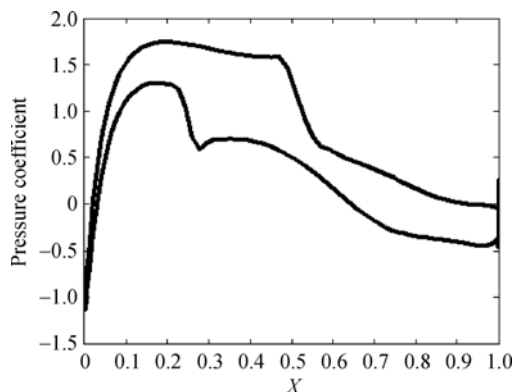
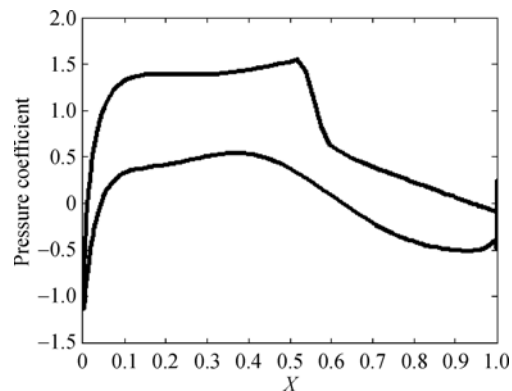


图5 “奇异点”与其他翼型的外形对比

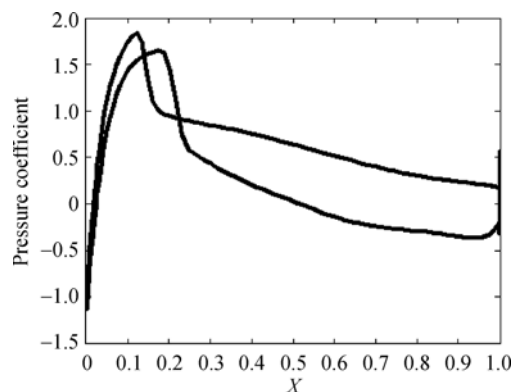
Fig. 5 Comparison of airfoils between 'bizarre airfoil' and other airfoils



(a) “奇异点”



(b) NASA SC(2) 0518翼型



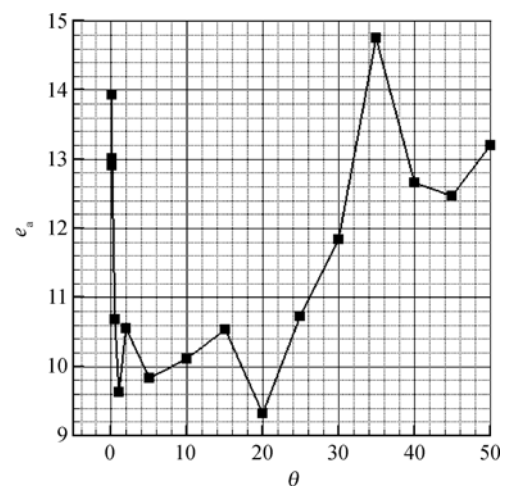
(c) “正常点”

图6 “奇异点”与其他翼型的表面压力系数对比
Fig. 6 Comparison of surface pressure coefficient between 'bizarre airfoil' and other airfoils

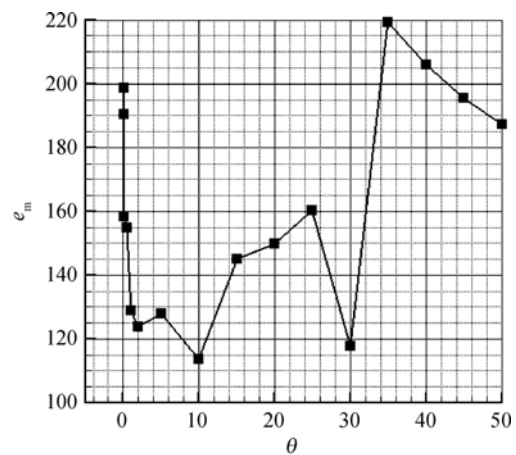
引起的波阻较小。

4 模型参数及类型对代理模型精度的影响

采用121个样本构建代理模型,相关函数核函数采用高斯函数,回归模型采用常数模型,研究相关参数 θ 对模型精度的影响。图7给出了不同 θ 值条件下,采用交叉验证方法得到的样本点预测值的平均误差和最大误差。可见相关参数 θ 对模型精度有较大影响,但这种影响并无规律可循。两种误差的最大值和最小值的差别分别为58%和93%,并且两种误差随 θ 值的变化趋势大致类似。在构建Kriging代理模型时,精心选择相关参数对改善模型精度非常重要:当对代理模型的精度要求较高时,需要将相关参数作为设计变量,模型精度作为优化目标,采用寻优算法得到最优的 θ



(a) 平均误差



(b) 最大误差

图7 Kriging代理模型误差随相关参数的变化规律
Fig. 7 Errors of Kriging surrogate model versus correlation parameters

值,这一过程较为复杂且会造成较大计算资源的消耗,因此当对代理模型的精度要求不是特别高时,可以选取若干典型的相关参数,研究代理模型精度随相关参数的变化规律,得出相对较好 θ 值。

为研究相关函数核函数类型对模型精度的影响,采用 121 个样本点、常数回归模型和相同的相关参数来构建代理模型. 图 8 给出了采用不同核函数条件下,采用交叉验证方法得到的样本点预测值的平均误差和最大误差. 可见采用高斯函数的代理模型精度最好,采用指数函数的次之,采用其余 3 种核函数的模型精度很差。

为研究回归模型阶数的影响,采用 121 个样本点、高斯相关函数和相同的相关参数来构建代

理模型. 表 4 给出了不同回归模型条件下代理模型的误差. 可见,代理模型误差与回归模型阶数大致成反比例关系,相对于常数模型,采用 2 阶多项式回归模型能将 Kriging 代理模型平均误差减小 18%,而将最大误差减小 47%。

表 4 不同回归模型条件下 Kriging 代理模型的误差

Table 4 Errors of Kriging surrogate model under condition of different regression models

误差	常数模型	1 阶模型	2 阶模型
平均误差/%	9.32	8.11	7.64
最大误差/%	149.91	71.79	79.69

5 结 论

本文以二维跨声速临界翼型的小攻角阻力特性为预测对象,采用 CFD 手段计算翼型的阻力系数,研究样本点数目、Kriging 代理模型的相关参数、相关函数核函数类型、回归模型阶数等对代理模型精度的影响. 研究发现:Kriging 代理模型能较好地预测气动阻力;模型精度随样本点的增多而提高,剔除与样本点响应趋势不相符的“奇异点”能显著改善模型精度. 就本文研究的二维气动问题而言,相关函数核函数类型对模型精度的影响最大,相关参数次之,回归模型的影响最小;在一定的样本数量条件下,当采用高斯相关函数、2 阶多项式回归模型,以及合适的相关参数值时,二维翼型阻力系数代理模型的精度最高。

在相关函数和回归模型类型确定的情况下,最佳相关参数的获取需要采用优化算法进行寻优计算,为了深化 Kriging 代理模型在气动等耗时问题中的应用研究,高效的优化算法及其与 Kriging 代理模型的嵌套使用可以作为下一步研究的方向。

参考文献:

- [1] Erguven V. Hybridizing genetic algorithm with artificial neural network in the aerodynamic optimization of the forward swept wing[R]. AIAA-2010-2915, 2010.
- [2] Griffin L W, Dorney D J, Huber F W, et al. Detailed aerodynamic design optimization of an RLV turbine [R]. AIAA-2001-3397, 2001.
- [3] Kim Y, Kim J, Jeon Y, et al. Multidisciplinary aerodynamic-structural design optimization of supersonic fighter wing using response surface methodology [R]. AIAA-2002-0322, 2002.
- [4] Trizila P, Kang C, Visbal M, et al. A surrogate model ap-

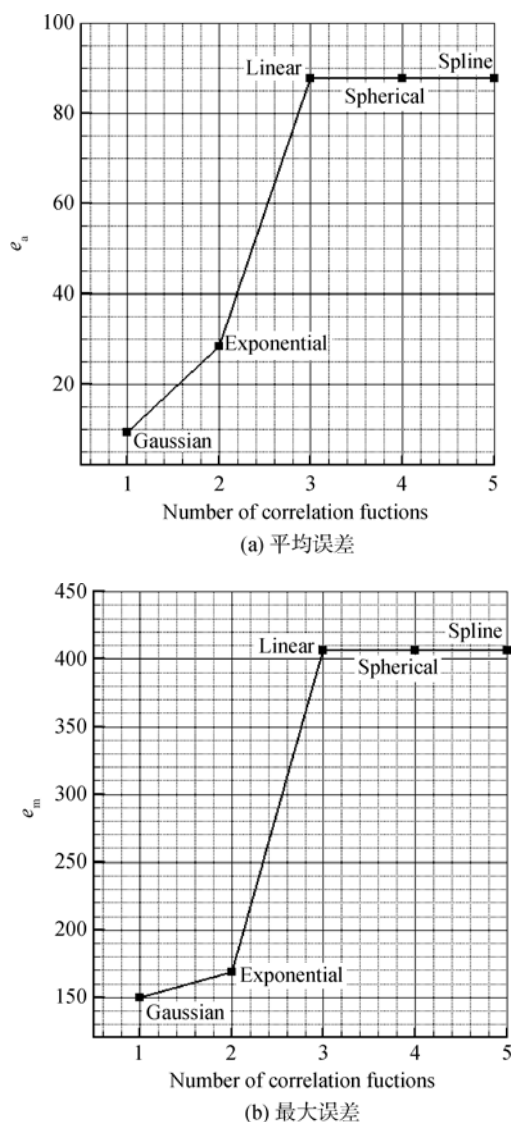


图 8 不同相关函数核函数条件下 Kriging 代理模型的误差

Fig. 8 Errors of Kriging surrogate model versus kernel function type of correlation function

- proach in 2D versus 3D flapping wing aerodynamic analysis [R]. AIAA-2008-5914, 2008.
- [5] Tyan M, Park J, Kim S, et al. Design optimization of subsonic airfoil and slotted flap shape using multi-fidelity aerodynamic analysis [R]. AIAA-2013-2704, 2013.
- [6] 张健. 飞机多学科设计优化中的近似方法研究 [D]. 西安: 西北工业大学, 2006.
- ZHANG Jian. Research of approximation methods in multidisciplinary design optimization of aircraft [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2006. (in Chinese)
- [7] Paiva R M, Carvalho A R D, Crawford C. Comparison of surrogate models in a multidisciplinary optimization framework for wing design [J]. AIAA Journal, 2010, 48(5): 995-1006.
- [8] Wang L, Beeson D, Wiggs G, et al. A comparison of meta-modeling methods using practical industry requirements [R]. AIAA-2006-1811, 2006.
- [9] Stander N, Roux W, Giger M, et al. A comparison of meta-modeling techniques for crashworthiness optimization [R]. AIAA-2004-4489, 2004.
- [10] 朱玉强. 基于 Kriging 插值的反射面天线机电集成优化设计 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.
- ZHU Yuqiang. Integrated structural-electromagnetic optimization of reflector antennas based on Kriging interpolation [D]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology, 2012. (in Chinese)
- [11] 郭炳岐. 基于 Kriging 方法的 GPS 高程拟合模型及其应用研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008.
- GUO Bingqi. Research on models of GPS height fitting based on Kriging method and their applications [D]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology, 2008. (in Chinese)
- [12] 陈志民. 基于 Kriging 模型的汽轮机基础可靠性动力优化方法 [D]. 大连: 大连理工大学, 2007.
- CHEN Zhimin. Dynamic optimization of reliability for the turbine engine frame foundation based on Kriging model [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007. (in Chinese)
- [13] 罗霞. 基于 Kriging 法的单索面斜拉桥静力可靠度分析 [D]. 广州: 华南理工大学, 2012.
- LUO Xia. Static reliability analysis of single cable plane cable stayed bridge based on Kriging method [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2012. (in Chinese)
- [14] 马洋, 王丹丹, 杨涛, 等. 基于代理模型的运载器头罩外形优化设计 [J]. 航空动力学报, 2014, 29(1): 192-198.
- MA Yang, WANG Dandan, YANG Tao, et al. Research on shroud configuration optimization design of transporter based on surrogate model [J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(1): 192-198. (in Chinese)
- [15] Crowley D, Douglas R, Mavris D N, et al. Reducing the computational expense to train Euler-level aerodynamic surrogate models for a family of vehicle configurations [R]. AIAA-2012-5282, 2012.
- [16] Mehmani A, Zhang J, Chowdhury S, et al. Surrogate-based design optimization with adaptive sequential sampling [R]. AIAA-2012-1527, 2012.
- [17] Mehmani A, Chowdhury S, Messac A. A novel approach to simultaneous selection of surrogate models, constitutive kernels, and hyper-parameter values [R]. AIAA-2014-1487, 2014.
- [18] 陈鹏, 李剑, 管涛. 基于 PSO 的 Kriging 相关模型参数优化 [J]. 微电子学与计算机, 2009, 26(4): 178-181.
- CHEN Peng, LI Jian, GUAN Tao. The optimization of parameters of Kriging correlation model based on particle swarm optimization [J]. Microelectronics and Computer, 2009, 26(4): 178-181. (in Chinese)
- [19] Ahmed M Y M, Qin N. Metamodels for aerothermodynamic design optimization of hypersonic spiked blunt bodies [J]. Aerospace Science and Technology, 2010, 14(1): 364-376.
- [20] 谢延敏. 基于 Kriging 模型和灰色关联分析的板料成形工艺稳健优化设计研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2007.
- XIE Yanmin. Research on robust optimization of sheet metal forming based on Kriging and grey relational analysis [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2007. (in Chinese)
- [21] 马洋. 基于代理模型和 MOEA/D 的飞行器气动外形优化设计研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2015.
- MA Yang. Research on the aerodynamic shape optimization of vehicle based on surrogate model and MOEA/D [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2015. (in Chinese)
- [22] Jones D R, Schonlau M, Welch W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions [J]. Journal of Global Optimization, 1998, 13(1): 455-492.
- [23] LIANG Haoquan, ZHU Ming, WU Zhe. Using cross-validation to design trend function in Kriging surrogate modeling [J]. AIAA Journal, 2014, 52(10): 2313-2327.
- [24] Kulfan B M. Universal parametric geometry representation method [J]. Journal of Aircraft, 2008, 45(1): 142-158.
- [25] 李端琪, 周华. 基于 CFD 的斜置翼翼型选型研究 [J]. 力学季刊, 2013, 34(3): 361-366.
- LI Duanqi, ZHOU Hua. CFD-based studies on airfoil selection of oblique wing [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2013, 34(3): 361-366. (in Chinese)
- [26] Keane A J. Wing optimization using design of experiment, response surface, and data fusion methods [J]. Journal of Aircraft, 2003, 40(4): 741-750.

(编辑: 陈越)